Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставляется одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«+» — задача решена полностью;
«±» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения (например, допущена арифметическая ошибка в конце правильного решения);
«∓» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения (например, задача решена для содержательного частного случая);
«−» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится оценка «0».

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач — задач, за которые поставлена оценка «+»или «±».

Некоторые критерии по задачам

Задача 1. Если доказано, что ответом может быть только одно число, то проверка этого ответа (т. е. доказательство корректности условия) от участников не требуется.

Задача 2. Случай команд (делегаций) из 1 человека можно рассматривать или не рассматривать, на оценку это не влияет.

Проверка того, что ситуация $n = 41$ (в др. вар-те 61) возможна (т. е. доказательство корректности условия), от участников не требуется.

Задача 3. Доказана только разложимость на два множителя — «∓».

Задача 5. Неравенство для суммы двух взаимно обратных чисел (если оно явно сформулированно) можно использовать без доказательства.
Неверно решено простейшее тригонометрическое уравнение — «∓».
В ответе для 3 разных целочисленных параметров использована одна буква — «±».

Задача 6. Ошибка на 1 при подсчете числа слагаемых — «±».

Задача 7. Доказано, что $CP \leqslant AP + BP$, но не проверено, что равенство достигается — «±».

Задача 8. Правильно найдены возможные x, но при нахождении a допущена ошибка — «±».

Задача 9. Доказательства того, что числа 1, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ (если числа a, b, c целые, то $a + b\sqrt{3} + c\sqrt{7} = 0 \implies a = b = c = 0$) от участников не требуется.

Задача 10. Правильно найдена общая часть кубов, но допущена *арифметическая* ошибка при нахождении ее объема — «±».

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

I вариант (ответы и краткие решения)

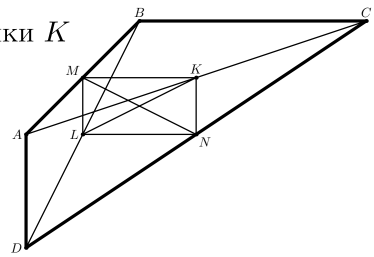
Задача 1. По условию 3 ученика, проходившие тестирование по химии, составляют от $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ до $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$. Соответственно, всего учеников больше 12, но меньше 18 — то есть, так как это число делится на 3, их 15. А в тестированнии по информатике принимало участие $15-3-15\cdot\frac{1}{3}=7$ учеников.
Ответ: 7.

Задача 2. Пусть в команде n человек, x — число 7-местных кают, t_1 и t_2 — число команд, разместившихся на параходе и дирижабле соответственно. Тогда

$$\begin{cases} nt_1 = 5(x-1)+2; \\ nt_2 = 7x+4; \end{cases}$$

Исключая x, получаем, что $n(5t_2-7t_1)=41$, то есть n — делитель простого числа 41.
Ответ: 41 (или 1).

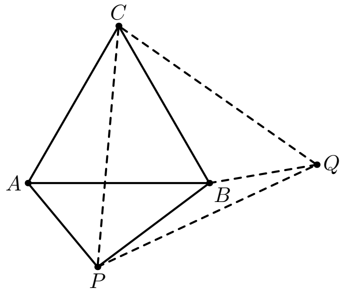
Задача 3. Напомним, что если n — нечетное число, то a^n+1 делится на $a+1$. Так как $2014=2\cdot19\cdot53$, число $2^{2014}+1$ делится на $2^{2\cdot19}+1$, а последнее число делится на $2^2+1=5$. Поэтому $2^{2014}+1=5\cdot\frac{2^{2\cdot19}+1}{5}\cdot x$.



Задача 4. Пусть точки M и N — середины сторон AB и CD, точки K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно.
Тогда $MKNL$ — прямоугольник (отрезки ML и KN оба равны половине стороны AD и параллельны ей как средние линии треугольников ADB и ADC; аналогичное утверждение верно про отрезки MK и LN и сторону BC). В частности, его диагонали равны.
Ответ: 2013.

Задача 5. Так как $|a+\frac{1}{a}|\geqslant 2$ и равенство достигается только при $|a|=1$, первое уравнение системы эквивалентно тому, что $\operatorname{tg} x=\pm1$, $\sin y=\pm1$. Тогда из второго уравнения $\cos z=0$.
Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi l\right)$.

Задача 6. Заметим, что если $f(x)=\dfrac{a^{2x}}{a^{2x}+a}$, то $f(1-x)=\dfrac{a}{a^{2x}+a}$ и потому $f(x)+f(1-x)=1$. Соответственно $S_{2013}=\frac{2013+1}{2}=1007$.
Ответ: 1007.



Задача 7. Предположим, что такой треугольник ABC найден. Повернем треугольник CAP вокруг точки C на $60°$. Отрезок AP при этом перейдет в равный ему отрезок BQ. Так как треугольник PCQ правильный, $PQ=CP$. По неравенству треугольника $PC=PQ\leqslant BQ+PB=PA+PB$.

Проверим, что равенство $PC=PA+PB$ достигается. Неравенство обращается в равенство, если (и только если) точки P, B и Q лежат на одной прямой, т. е. если $\angle PBC+\angle CBQ=180°$. Так как $\angle PBC=\angle PBA+60°$, а $\angle QBC=\angle PAB+60°$, последнее условие равносильно тому, что $\angle PAB+\angle PBA=60°$, т. е. тому, что $\angle APB=120°$.

Есть у задачи и **вычислительное решение.** Пусть $AB=c$, $PB=a$, $PA=b$, $\angle APB=\varphi$, $\angle PBA=\beta$. Тогда из треугольника ABP

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi;\quad \sin\beta=\frac{b}{c}\sin\varphi;\quad \cos\beta=\frac{a-b\cos\varphi}{c}.$$

(последнее равенство можно либо увидеть непосредственно, либо получить, 2 раза применив теорему косинусов). Теперь из треугольника CPB по теореме косинусов

$$CP^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right) = 2a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) =$$

$$= 2a^2 + b^2 = 2ab\cos\varphi - ac\frac{a - b\cos\varphi}{c} + ac\sqrt{3}\frac{b\sin\varphi}{c} = a^2 + b^2 + 2ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right) =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

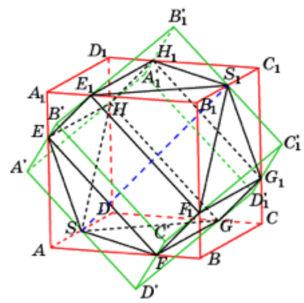
Ответ: 5.

Задача 8. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант равен $x^2(49 - 40x^2)$. Так как x — целое число, этот дискриминант неотрицателен только при $x = 0$ или $x = \pm 1$.
Ответ: 0; ± 1; $\pm\frac{5}{2}$.

Задача 9. Пусть первая муха прошла до встречи m сторон основания и n боковых ребер, а вторая муха — i меньших диагоналей основания (длины $10\sqrt{3}$), j больших диагоналей основания (длины 20) и k диагоналей боковых граней (длины $5\sqrt{7}$). Поскольку мухи двигаются с одной скоростью, пройденные ими пути равны:

$$10m + 5\sqrt{3}n = 10\sqrt{3}i + 20j + 5\sqrt{7}k,$$

откуда $m = 2j$, $n = 2i$, $k = 0$. Таким образом, первая муха прошла четное число ($n = 2i$) боковых ребер — поэтому встреча произошла на исходном основании — и четное число ($m = 2j$) сторон основания — поэтому встреча произошла на одной из трех вершин.
Ответ: A, C, E.



Задача 10. Обозначим S и S_1 соответственно середины ребер AD и B_1C_1. Повернутый куб обозначим $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$. Общей частью исходного куба и повернутого является многогранник, составленный из правильной четырехугольной призмы $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и двух правильных четырехугольных пирамид $SEFGH$, $S_1E_1F_1G_1H_1$.

Сторона основания каждой из пирамид равна 1, высота равна $\frac{1}{2}$, так что ее объем равен $\frac{1}{6}$. Объем призмы равен $\sqrt{2} - 1$.
Ответ: $\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

II вариант (ответы и краткие решения)

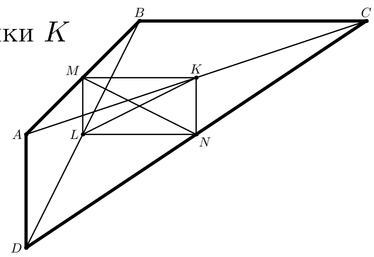
Задача 1. По условию 2 ученика, проходившие тестирование по биологии, составляют от $1-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ до $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Соответственно, всего учеников больше 16, но меньше 20 — то есть, так как это число делится на 2, их 18. А в тестированнии по химии принимало участие $18-2-18\cdot\frac{1}{2}=7$ учеников.
Ответ: 7.

Задача 2. Пусть в делегации n человек, x — число 3-местных автомобилей, t_1 и t_2 — число делегаций из первой и второй групп соотвественно. Тогда

$$\begin{cases} nt_1 = 3x+4; \\ nt_2 = 5(x+5)+2; \end{cases}$$

Исключая x, получаем, что $n(3t_2-5t_1)=61$, то есть n — делитель простого числа 61.
Ответ: 61 (или 1).

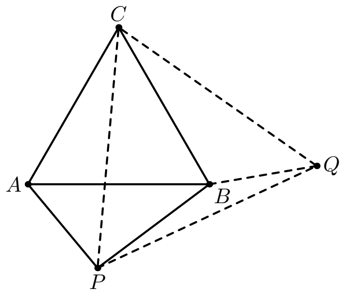
Задача 3. Напомним, что если n — нечетное число, то a^n+1 делится на $a+1$. Так как $2013=3\cdot 11\cdot 61$, число $4^{2013}+1$ делится на $4^{3\cdot 11}+1$, а последнее число делится на $4^3+1=65$. Поэтому $4^{2013}+1=65\cdot\frac{4^{3\cdot 11}+1}{65}\cdot x$.



Задача 4. Пусть точки M и N — середины сторон AB и CD, точки K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно.
Тогда $MKNL$ — прямоугольник (отрезки ML и KN оба равны половине стороны AD и параллельны ей как средние линии треугольников ADB и ADC; аналогичное утверждение верно про отрезки MK и LN и сторону BC). В частности, его диагонали равны.
Ответ: 2012.

Задача 5. Так как $|a+\frac{1}{a}|\geqslant 2$ и равенство достигается только при $|a|=1$, первое уравнение системы эквивалентно тому, что $\operatorname{tg} x=\pm 1$, $\sin y=1$. Тогда из второго уравнения $\cos z=0$.
Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi l\right)$.

Задача 6. Заметим, что если $f(x)=\dfrac{a^{2x}}{a^{2x}+a}$, то $f(1-x)=\dfrac{a}{a^{2x}+a}$ и потому $f(x)+f(1-x)=1$. Соответственно $S_{2013}=\frac{2013+1}{2}=1007$.
Ответ: 1007.



Задача 7. Предположим, что такой треугольник ABC найден. Повернем треугольник CAP вокруг точки C на 60°. Отрезок AP при этом перейдет в равный ему отрезок BQ. Так как треугольник PCQ правильный, $PQ=CP$. По неравенству треугольника $PC=PQ\leqslant BQ+PB=PA+PB$.

Проверим, что равенство $PC=PA+PB$ достигается. Неравенство обращается в равенство, если (и только если) точки P, B и Q лежат на одной прямой, т. е. если $\angle PBC+\angle CBQ=180^\circ$. Так как $\angle PBC=\angle PBA+60^\circ$, а $\angle QBC=\angle PAB+60^\circ$, последнее условие равносильно тому, что $\angle PAB+\angle PBA=60^\circ$, т. е. тому, что $\angle APB=120^\circ$.

Есть у задачи и **вычислительное решение.** Пусть $AB=c$, $PB=a$, $PA=b$, $\angle APB=\varphi$, $\angle PBA=\beta$. Тогда из треугольника ABP

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi; \quad \sin\beta=\frac{b}{c}\sin\varphi; \quad \cos\beta=\frac{a-b\cos\varphi}{c}.$$

(последнее равенство можно либо увидеть непосредственно, либо получить, 2 раза применив теорему косинусов). Теперь из треугольника CPB по теореме косинусов

$$CP^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) = 2a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) =$$

$$= 2a^2 + b^2 = 2ab\cos\varphi - ac\frac{a - b\cos\varphi}{c} + ac\sqrt{3}\frac{b\sin\varphi}{c} = a^2 + b^2 + 2ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right) =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

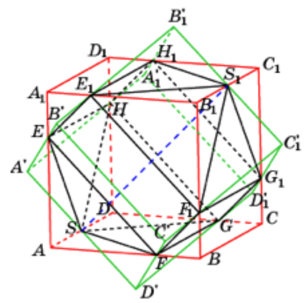
Ответ: 7.

Задача 8. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант равен $x^2(25 - 24x^2)$. Так как x — целое число, этот дискриминант неотрицателен только при $x = 0$ или $x = \pm 1$.
Ответ: 0; ± 1; $\pm\frac{3}{2}$.

Задача 9. Пусть первая муха прошла до встречи m сторон основания и n боковых ребер, а вторая муха — i меньших диагоналей основания (длины $10\sqrt{3}$), j больших диагоналей основания (длины 20) и k диагоналей боковых граней (длины $5\sqrt{7}$). Поскольку мухи двигаются с одной скоростью, пройденные ими пути равны:

$$10m + 5\sqrt{3}n = 10\sqrt{3}i + 20j + 5\sqrt{7}k,$$

откуда $m = 2j$, $n = 2i$, $k = 0$. Таким образом, первая муха прошла четное число ($n = 2i$) боковых ребер — поэтому встреча произошла на исходном основании — и четное число ($m = 2j$) сторон основания — поэтому встреча произошла на одной из трех вершин.
Ответ: A, C, E.



Задача 10. Обозначим S и S_1 соответственно середины ребер AD и B_1C_1. Повернутый куб обозначим $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$. Общей частью исходного куба и повернутого является многогранник, составленный из правильной четырехугольной призмы $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и двух правильных четырехугольных пирамид $SEFGH$, $S_1E_1F_1G_1H_1$.

Сторона основания каждой из пирамид равна 1, высота равна $\frac{1}{2}$, так что ее объем равен $\frac{1}{6}$. Объем призмы равен $\sqrt{2} - 1$.
Ответ: $\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

III вариант (ответы и краткие решения)

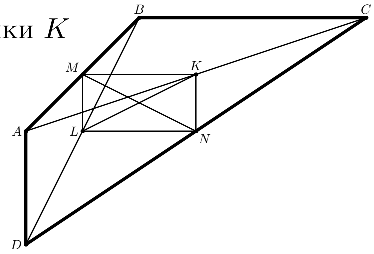
Задача 1. По условию 2 ученика, проходившие тестирование по биологии, составляют от $1-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ до $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Соответственно, всего учеников больше 16, но меньше 20 — то есть, так как это число делится на 2, их 18. А в тестированнии по химии принимало участие $18-2-18\cdot\frac{1}{2}=7$ учеников.
Ответ: 7.

Задача 2. Пусть в команде n человек, x — число 3-местных кают, t_1 и t_2 — число команд, разместившихся на параходе и дирижабле соответственно. Тогда

$$\begin{cases} nt_1 = 7(x+2)+4; \\ nt_2 = 3x+1; \end{cases}$$

Исключая x, получаем, что $n(3t_1-7t_2)=47$, то есть n — делитель простого числа 47.
Ответ: 47 (или 1).

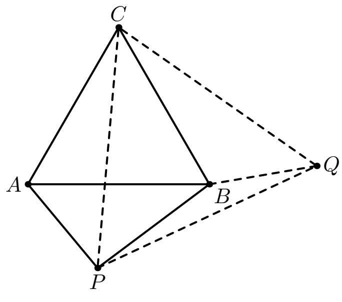
Задача 3. Напомним, что если n — нечетное число, то a^n+1 делится на $a+1$. Так как $2014=2\cdot19\cdot53$, число $2^{2014}+1$ делится на $2^{2\cdot19}+1$, а последнее число делится на $2^2+1=5$. Поэтому $2^{2014}+1=5\cdot\frac{2^{2\cdot19}+1}{5}\cdot x$.



Задача 4. Пусть точки M и N — середины сторон AB и CD, точки K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно.
Тогда $MKNL$ — прямоугольник (отрезки ML и KN оба равны половине стороны AD и параллельны ей как средние линии треугольников ADB и ADC; аналогичное утверждение верно про отрезки MK и LN и сторону BC). В частности, его диагонали равны.
Ответ: 2013.

Задача 5. Так как $|a+\frac{1}{a}|\geqslant 2$ и равенство достигается только при $|a|=1$, первое уравнение системы эквивалентно тому, что $\operatorname{tg} x=\pm1$, $\sin y=1$. Тогда из второго уравнения $\cos z=0$.
Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi l\right)$.

Задача 6. Заметим, что если $f(x)=\dfrac{a^{2x}}{a^{2x}+a}$, то $f(1-x)=\dfrac{a}{a^{2x}+a}$ и потому $f(x)+f(1-x)=1$. Соответственно $S_{2013}=\frac{2013+1}{2}=1007$.
Ответ: 1007.



Задача 7. Предположим, что такой треугольник ABC найден. Повернем треугольник CAP вокруг точки C на 60°. Отрезок AP при этом перейдет в равный ему отрезок BQ. Так как треугольник PCQ правильный, $PQ=CP$. По неравенству треугольника $PC=PQ\leqslant BQ+PB=PA+PB$.

Проверим, что равенство $PC=PA+PB$ достигается. Неравенство обращается в равенство, если (и только если) точки P, B и Q лежат на одной прямой, т. е. если $\angle PBC+\angle CBQ=180^\circ$. Так как $\angle PBC=\angle PBA+60^\circ$, а $\angle QBC=\angle PAB+60^\circ$, последнее условие равносильно тому, что $\angle PAB+\angle PBA=60^\circ$, т. е. тому, что $\angle APB=120^\circ$.

Есть у задачи и **вычислительное решение.** Пусть $AB=c$, $PB=a$, $PA=b$, $\angle APB=\varphi$, $\angle PBA=\beta$. Тогда из треугольника ABP

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi; \quad \sin\beta=\frac{b}{c}\sin\varphi; \quad \cos\beta=\frac{a-b\cos\varphi}{c}.$$

(последнее равенство можно либо увидеть непосредственно, либо получить, 2 раза применив теорему косинусов). Теперь из треугольника CPB по теореме косинусов

$$CP^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) = 2a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) =$$

$$= 2a^2 + b^2 = 2ab\cos\varphi - ac\frac{a - b\cos\varphi}{c} + ac\sqrt{3}\frac{b\sin\varphi}{c} = a^2 + b^2 + 2ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right) =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

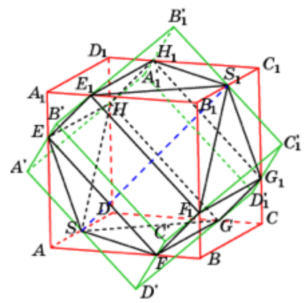
Ответ: 9.

Задача 8. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант равен $x^2(81 - 56x^2)$. Так как x — целое число, этот дискриминант неотрицателен только при $x = 0$ или $x = \pm 1$.
Ответ: 0; ± 1; $\pm\frac{2}{7}$.

Задача 9. Пусть первая муха прошла до встречи m сторон основания и n боковых ребер, а вторая муха — i меньших диагоналей основания (длины $10\sqrt{3}$), j больших диагоналей основания (длины 20) и k диагоналей боковых граней (длины $5\sqrt{7}$). Поскольку мухи двигаются с одной скоростью, пройденные ими пути равны:

$$10m + 5\sqrt{3}n = 10\sqrt{3}i + 20j + 5\sqrt{7}k,$$

откуда $m = 2j$, $n = 2i$, $k = 0$. Таким образом, первая муха прошла четное число ($n = 2i$) боковых ребер — поэтому встреча произошла на исходном основании — и четное число ($m = 2j$) сторон основания — поэтому встреча произошла на одной из трех вершин.
Ответ: A, C, E.



Задача 10. Обозначим S и S_1 соответственно середины ребер AD и B_1C_1. Повернутый куб обозначим $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$. Общей частью исходного куба и повернутого является многогранник, составленный из правильной четырехугольной призмы $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и двух правильных четырехугольных пирамид $SEFGH$, $S_1E_1F_1G_1H_1$.

Сторона основания каждой из пирамид равна 1, высота равна $\frac{1}{2}$, так что ее объем равен $\frac{1}{6}$. Объем призмы равен $\sqrt{2} - 1$.
Ответ: $\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **03.02.2013**

IV вариант (ответы и краткие решения)

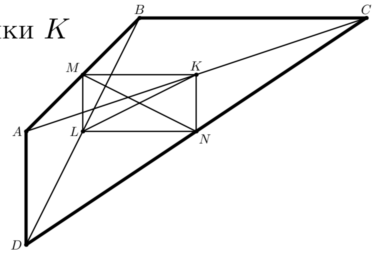
Задача 1. По условию 3 ученика, проходившие тестирование по химии, составляют от $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ до $1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$. Соответственно, всего учеников больше 12, но меньше 18 — то есть, так как это число делится на 3, их 15. А в тестированнии по информатике принимало участие $15-3-15\cdot\frac{1}{3}=7$ учеников.
Ответ: 7.

Задача 2. Пусть в делегации n человек, x — число 7-местных автомобилей, t_1 и t_2 — число делегаций из первой и второй групп соотвественно. Тогда

$$\begin{cases} nt_1 = 7x+6; \\ nt_2 = 5(x-2)+3; \end{cases}$$

Исключая x, получаем, что $n(5t_1-7t_2)=79$, то есть n — делитель простого числа 79.
Ответ: 79 (или 1).

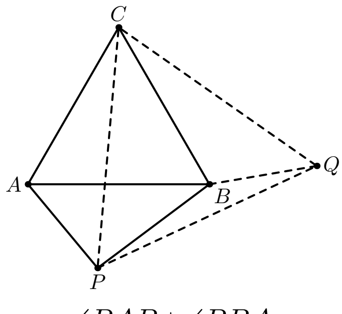
Задача 3. Напомним, что если n — нечетное число, то a^n+1 делится на $a+1$. Так как $2013=3\cdot 11\cdot 61$, число $4^{2013}+1$ делится на $4^{3\cdot 11}+1$, а последнее число делится на $4^3+1=65$. Поэтому $4^{2013}+1=65\cdot\frac{4^{3\cdot 11}+1}{65}\cdot x$.



Задача 4. Пусть точки M и N — середины сторон AB и CD, точки K и L — середины диагоналей AC и BD соответственно.
Тогда $MKNL$ — прямоугольник (отрезки ML и KN оба равны половине стороны AD и параллельны ей как средние линии треугольников ADB и ADC; аналогичное утверждение верно про отрезки MK и LN и сторону BC). В частности, его диагонали равны.
Ответ: 2012.

Задача 5. Так как $|a+\frac{1}{a}|\geqslant 2$ и равенство достигается только при $|a|=1$, первое уравнение системы эквивалентно тому, что $\operatorname{tg} x=\pm 1$, $\sin y=\pm 1$. Тогда из второго уравнения $\cos z=0$.
Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi l\right)$.

Задача 6. Заметим, что если $f(x)=\dfrac{a^{2x}}{a^{2x}+a}$, то $f(1-x)=\dfrac{a}{a^{2x}+a}$ и потому $f(x)+f(1-x)=1$. Соответственно $S_{2013}=\frac{2013+1}{2}=1007$.
Ответ: 1007.



Задача 7. Предположим, что такой треугольник ABC найден. Повернем треугольник CAP вокруг точки C на $60°$. Отрезок AP при этом перейдет в равный ему отрезок BQ. Так как треугольник PCQ правильный, $PQ=CP$. По неравенству треугольника $PC=PQ\leqslant BQ+PB=PA+PB$.

Проверим, что равенство $PC=PA+PB$ достигается. Неравенство обращается в равенство, если (и только если) точки P, B и Q лежат на одной прямой, т. е. если $\angle PBC+\angle CBQ=180°$. Так как $\angle PBC=\angle PBA+60°$, а $\angle QBC=\angle PAB+60°$, последнее условие равносильно тому, что $\angle PAB+\angle PBA=60°$, т. е. тому, что $\angle APB=120°$.

Есть у задачи и **вычислительное решение.** Пусть $AB=c$, $PB=a$, $PA=b$, $\angle APB=\varphi$, $\angle PBA=\beta$. Тогда из треугольника ABP

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi; \quad \sin\beta=\frac{b}{c}\sin\varphi; \quad \cos\beta=\frac{a-b\cos\varphi}{c}.$$

(последнее равенство можно либо увидеть непосредственно, либо получить, 2 раза применив теорему косинусов). Теперь из треугольника CPB по теореме косинусов

$$CP^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right) = 2a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi - 2ac\left(\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta\right) =$$
$$= 2a^2 + b^2 = 2ab\cos\varphi - ac\frac{a - b\cos\varphi}{c} + ac\sqrt{3}\frac{b\sin\varphi}{c} = a^2 + b^2 + 2ab\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi - \frac{1}{2}\cos\varphi\right) =$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \Longrightarrow \varphi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

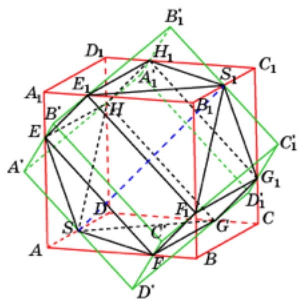
Ответ: 11.

Задача 8. Рассмотрим уравнение как квадратное относительно a. Тогда его дискриминант равен $x^2(49 - 40x^2)$. Так как x — целое число, этот дискриминант неотрицателен только при $x = 0$ или $x = \pm 1$.
Ответ: 0; ± 1; $\pm\frac{2}{5}$.

Задача 9. Пусть первая муха прошла до встречи m сторон основания и n боковых ребер, а вторая муха — i меньших диагоналей основания (длины $10\sqrt{3}$), j больших диагоналей основания (длины 20) и k диагоналей боковых граней (длины $5\sqrt{7}$). Поскольку мухи двигаются с одной скоростью, пройденные ими пути равны:

$$10m + 5\sqrt{3}n = 10\sqrt{3}i + 20j + 5\sqrt{7}k,$$

откуда $m = 2j$, $n = 2i$, $k = 0$. Таким образом, первая муха прошла четное число ($n = 2i$) боковых ребер — поэтому встреча произошла на исходном основании — и четное число ($m = 2j$) сторон основания — поэтому встреча произошла на одной из трех вершин.
Ответ: A, C, E.



Задача 10. Обозначим S и S_1 соответственно середины ребер AD и B_1C_1. Повернутый куб обозначим $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$. Общей частью исходного куба и повернутого является многогранник, составленный из правильной четырехугольной призмы $EFGHE_1F_1G_1H_1$ и двух правильных четырехугольных пирамид $SEFGH$, $S_1E_1F_1G_1H_1$.

Сторона основания каждой из пирамид равна 1, высота равна $\frac{1}{2}$, так что ее объем равен $\frac{1}{6}$. Объем призмы равен $\sqrt{2} - 1$.
Ответ: $\sqrt{2} - \frac{2}{3}$.